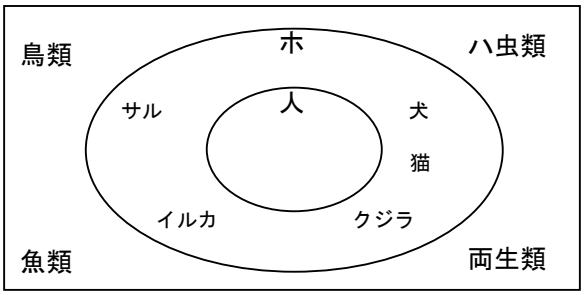
Copywrite
遊学社　長山　訓

Part-HA1111 ●命題って何？，対偶って何？

論理学における「命題」とは，例えば，「人類はすべてホ乳類である（言い換えると，人類であるならばホ乳類である）」といった文章のことをいいます。

そして，この文章短く表現するために用いられるのが「論理式」で，
人類 → ホ乳類　とか，
人 → ホ　　のように表現します。

また，ビジュアル化するためのツールとして，下に示すベン図があります。



このベン図では，参考のためにいろいろ記載しましたが，実際には，「人」と「ホ」だけにすべきです。

なお，約束事として，　「人」は「人（人類）であること」を意味し，
「$\overline{人}$」は「人（人類）ではないこと」を意味します。

※ちなみに，「$\overline{人}$」は「人でなし」とは違います。「人でなし」は「ろくでなし」のような用法で，人間とはいえないほどの極悪人といった意味です。

冗談はさておき，ある命題を元の命題とするとき，その逆命題，裏命題，および対偶命題が存在します。例えば，前述の「人→ホ」を元の命題とするとき，逆，裏，対偶はそれぞれ次のようになります。

①	元の命題	人 → ホ	人類ならば，ホ乳類である。
②	元の逆命題	ホ → 人	ホ乳類ならば，人類である。
③	元の裏命題	$\overline{人}$ → $\overline{ホ}$	人類でないならば，ホ乳類でない。
④	元の対偶命題	$\overline{ホ}$ → $\overline{人}$	ホ乳類でないならば，人類でない。

現在の生物学では，元の命題「人→ホ」は真実です。魚類や鳥類などに属する人間（人類）は存在しません。この命題が「真実ではない」と主張するなら，ホ乳類に属さない人間（人類）が存在することを証明する必要がありますが，そんなことは不可能ですね。
では，元の逆命題，裏命題，対偶命題の中に，「真実である」といえる命題は存在するでしょうか？

②逆命題（ホ → 人）
「ホ乳類ならば（ホ乳類はすべて），人類である」…真実ではありませんね。もっとも，遠い未来のことはわかりません。仮に人類以外のホ乳類がすべて絶滅するようなことがあれば，この命題は真実となります。

これは蛇足ですが，一般的には大型種ほど環境変化に弱く，絶滅しやすいと言われます。人類は，ホ乳類の中では比較的大型種ですから，人類を残して他のホ乳類がすべて絶滅することはないと，私は思います。

Copywrite
遊学社　長山　訓

③裏命題（$\overline{人} \rightarrow \overline{ホ}$）
「人類でないならば（人類でない生命体はすべて），ホ乳類でない」
これもまた真実とは言えませんね。
もちろん，人類以外の生命体は，バクテリアやウイルスを含めて，大部分がホ乳類ではありません。しかし，サル，犬，猫，イルカ，クジラなどは，人類ではないものの，私たち人類同様，ホ乳類の仲間たちです。

④対偶命題（$\overline{ホ} \rightarrow \overline{人}$）
「ホ乳類でないならば（ホ乳類でない生命体はすべて），人類ではない」
いかがでしょうか？これは真実ですね。
このことは，前ページのベン図からもわかります。人類の集合を示す円はホ乳類の集合を示す円の内側にのみ存在し，外側には存在しないのですから。

このように，元の命題が成立している（真実である）とき，その対偶命題もまた成立します（真実です）。実はこのことは,元の命題とその対偶命題は,まったく同義（同じ内容）の命題であることを意味します。
これに対して，元の命題が成立しているとき，その逆命題や裏命題は成立しません（真実ではありません）。したがって，通常は逆命題や裏命題を考慮する必要はありません。というか，認識から排除すべきといえます。

■ＣＯＬＵＭＮ（逆命題が成立する例をいくつか紹介しましょう）

例１）　元　　「２の倍数であり，３の倍数でもある数」→「６の倍数」
　　元の逆　　「６の倍数」→「２の倍数であり，３の倍数でもある数」

なぜって,「２の倍数であり，３の倍数でもある数」と「６の倍数」は完全に同義だからです。なお,完全に同義は記号「≡」を用います（合同と読みます）。
「２の倍数であり，３の倍数でもある数」≡「６の倍数」

例２）例えば，あるレストランで，メニューＡとＢは単独では注文できず，必ずセットで注文しなければならないとき，

元	$A \rightarrow B$	≡	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	（元の対偶）
元の逆	$B \rightarrow A$	≡	$\overline{A} \rightarrow \overline{B}$	（元の裏）

ところで，この場合,「Ａだけ」とか「Ｂだけ」という注文は認められないのですが,「Ａ，Ｂいずれも注文しない」というのは認められるでしょうか？
答は,Yes ！です。認められます。それは「≡」の右側の命題からも明白です。
ちなみに，これは少し難しい話ですので，流していただいていいのですが,逆命題の対偶が裏命題であり，裏命題の対偶が逆命題となります。よって，

元の逆命題　≡　元の裏命題　となります。

◆対偶のとり方（導き出し方）

ある元命題の対偶をとる（得る）には，元命題の左右を入れ替え，元命題の否定形にします（元で肯定形なら否定形に，元で否定形なら肯定形にします）。これは，機械的に覚えてしまいましょう。

$P \rightarrow Q$ が元命題のとき，	その対偶は $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$	
$P \rightarrow \overline{Q}$ が元命題のとき，	その対偶は $Q \rightarrow \overline{P}$	（$\overline{\overline{Q}} \rightarrow \overline{P}$）
$\overline{P} \rightarrow Q$ が元命題のとき，	その対偶は $\overline{Q} \rightarrow P$	（$\overline{Q} \rightarrow \overline{\overline{P}}$）
$\overline{P} \rightarrow \overline{Q}$ が元命題のとき，	その対偶は $Q \rightarrow P$	

ちなみに，否定の否定は肯定です。「敵の敵は味方」みたいなものです。

２～３ページの例は，ある意味で考えやすい容易な事例でした。なぜなら，「人類ならばホ乳類」は誰しもが知っている真実だからです。ところが，試験で出題される問題の多くは，「〇〇〇はすべて□□□である」ことが判明しているとき,…」というように,何らかの状況が成立してことを仮定しています。
このため，成立しない逆命題や裏命題を，成立すると勘違いするリスクが大きくなります。早速，例をあげて見ていきましょう。

いま，ある採用試験における受験者の学習量と合否の関係について，「合格者はすべて十分学習した」という命題が成立している（真実である）とします。そして,これを元命題とします。なお,補欠合格はなく,合格か不合格とします。

	論理式表現	命題の具体的な意味
元の命題	合 → 学	合格者はすべて十分学習した。
元の逆命題	学 → 合	十分学習した人はすべて合格した。
元の裏命題	$\overline{合}$ → $\overline{学}$	合格しなかった人はすべて学習不十分。
元の対偶命題	$\overline{学}$ → $\overline{合}$	学習不十分の人はすべて合格しなかった。

ところで，学習量については「十分」または「不十分」の２種類，試験の結果については「合格した」か「合格しなかった（不合格）」の２種類に限定すれば，次の①～④の４種類の人（集合）に分類できます。
そして，上記の４つの命題のすべてがそれぞれ成立している（真実である）と仮定したとき（実際には４つすべて成立するのは不可能ですが），それぞれ①～④の４種類の中に，確実に存在しないと断定できる集合があります。
元命題が成立しているとき，確実に存在しないのは③ですが，逆命題，裏命題，対偶命題がそれぞれ成立するとき，確実に存在しない集合は①～④のどれでしょうか？

	元	逆	裏	対偶
①　学習十分で，　合格した人				
②　学習十分で，　合格しなかった人				
③　学習不十分で,合格した人	×			
④　学習不十分で,合格しなかった人				

まず，元の命題では,「合格者はすべて十分学習した」となっていて，限定の対象は合格者です。よって，合格者は①のみで，③の学習不十分でも合格できた人は存在しないことになります。
また，元の対偶では,「学習不十分の人はすべて合格しなかった」となっていて，限定の対象は学習不十分の人です。よって，学習不十分は④のみで，③の学習不十分でも合格できた人は存在しないことになります。
そして，③は存在しないという点で一致することこそが，元命題と元の対偶命題とは，実はまったく同義（同内容）の命題であることを示しています。

次に,元の逆命題では,「十分学習した人はすべて合格した」となっていて，限定の対象は十分学習した人です。よって，十分学習した人は①のみで，②の学習十分なのに合格しなかった（不合格）人は存在しないことになります。
また,元の裏命題では,「合格しなかった（不合格）人はすべて学習不十分」となっていて，限定の対象は不合格の人です。よって，不合格となったのは④のみで，②の学習十分なのに不合格の人は存在しないことになります。
そして，②は存在しないという点で一致することこそが，元の逆命題と元の裏命題とは,実はまったく同義（同内容）の命題であることを示しています。

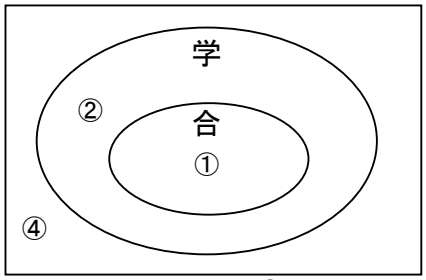
さらに，これらのことは，元の命題が成立している（真実である）とき，元の対偶命題もまた成立する（真実である）ものの，元の逆命題や裏命題は成立しない（真実ではない）ことを示しています。

Copywrite
遊学社　長山　訓

	元	逆	裏	対偶
①　学習十分で，　合格した人				
②　学習十分で，　合格しなかった人		×	×	
③　学習不十分で，合格した人	×			×
④　学習不十分で，合格しなかった人				

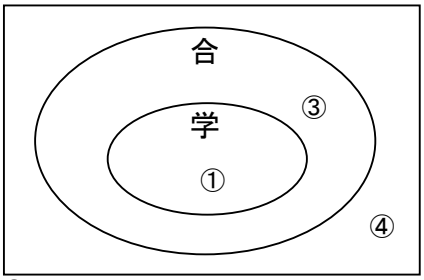
なお，前ページの元の命題（合→学）と元の逆命題（学→合）をベン図で描くと次のようになります。初学者にとっては，ベン図を描いて考えたほうがわかりやすいかもしれませんね。

元命題　合格者 → 十分学習



③は存在しない

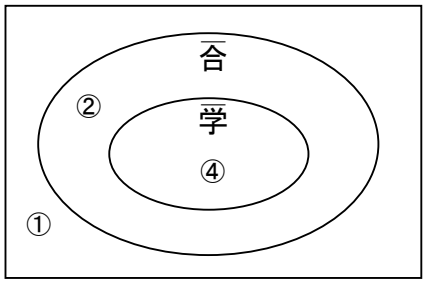
元の逆命題　十分学習 → 合格者



②は存在しない

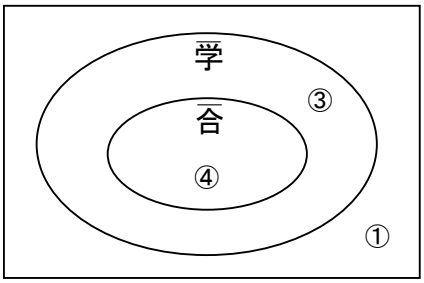
では，元の対偶命題（$\overline{学}$→$\overline{合}$）と元の裏命題（$\overline{合}$→$\overline{学}$）をベン図で描くとどうなるでしょうか？　下の図でＯＫでしょうか？

元の対偶　学習不十分 → 不合格



③は存在しない

元の裏命題　不合格 → 学習不十分



②は存在しない

上の図でも間違いではないのですが，通常はこのようには描きません。
元の対偶命題のベン図は，元命題のベン図と同じ図を描き，元の裏命題のベン図は，元の逆命題のベン図と同じ図を描きます。なぜかというと，ベン図では，できるだけ否定形の表現を避けたいからです。

ちなみに，この Part-ha1111 は，ＳＰＩ～公務員初級レベルの Part として設定したのですが，実際にはそんなに容易ではありません。
実は，大卒上級公務員試験の命題論理の問題をそこそこ解ける方の中にも，この Part の内容に関する理解があやふやな方がいます。それは，言い換えると，次の３つさえ覚えていれば正解できるような問題も多いということです。

①　元命題が成立するとき，その対偶も成立し，逆と裏は成立しないこと
②　３ページの最下部に掲載した，対偶のとり方
③　三段論法の用法

なお，③の三段論法については，この後の Part で説明致します。

ではもう一つ，いま「Ａ教徒はすべて（Ａ教徒ならば），豚肉を食べることは許されない」ということが，事実として判明しているとします。そして，これを元命題とします。

なお，逆命題は，元の命題の左右を入れ替えるだけです。また，裏命題は，左右の入れ替えは行わず，元命題の否定形にするのですが，元命題で否定形になっている場合，裏命題では肯定形となります。否定の否定は肯定だからです。そして，対偶は，逆と裏の両方の処理をすることになります。
これらの処理もまた，ちょっと大変ですが，機械的に覚えてしまいましょう。

	論理式表現	命題の具体的な意味
元の命題	Ａ → $\overline{豚}$	Ａ教徒ならば，豚を食べることは許されない。
元の逆命題	$\overline{豚}$ → Ａ	豚を食べることが許されない人ならば，Ａ教徒である。
元の裏命題	$\overline{A}$ → 豚	Ａ教徒でないならば，豚を食べることが許される。
元の対偶命題	豚 → $\overline{A}$	豚を食べることが許されなる人ならば，Ａ教徒ではない。

ところで，信教については「Ａ教徒である」または「Ａ教徒ではない」の２種類に，豚肉を食べることについては「許される」または「許されない」の２種類に限定すると，次の①～④の４種類の人（集合）に分類できます。
そして，上記の４つの命題のすべてがそれぞれ成立している（真実である）と仮定したとき（実際には４つすべて成立するのは不可能ですが），それぞれ①～④の４種類の中に，確実に存在しないと断定できる集合があります。
元命題，逆命題，裏命題，対偶命題がそれぞれ成立するとき，確実に存在しない集合は①～④のどれでしょうか？

	元	逆	裏	対偶
①　豚肉ＯＫのＡ教徒の人				
②　豚肉ＯＫのＡ教徒ではない人				
③　豚肉ＮＧのＡ教徒の人				
④　豚肉ＮＧのＡ教徒ではない人				

まず，元命題では，「Ａ教徒であるならば，豚を食べることは許されない」となっていて，限定の対象はＡ教徒です。よって，Ａ教徒は③のみで，①の豚肉ＯＫのＡ教徒は存在しないことになります。
また，元の対偶では，「豚を食べることが許されているならば，Ａ教徒ではない」となっていて，限定の対象は豚肉ＯＫの人です。よって，豚肉ＯＫなのは②のみで，①の豚肉ＯＫのＡ教徒は存在しないことになります。
そして，①は存在しないという点で一致することこそが，元の命題と元の対偶命題とは，実はまったく同義（同内容）の命題であることを示しています。
※「元命題の対偶」の対偶は，元命題です。

次に，元の逆命題では，「豚肉を食べることが許されない人なら，Ａ教徒である」となっていて，限定の対象は豚肉ＮＧの人です。よって，豚肉ＮＧは③のみで，④の豚肉ＮＧのＡ教徒でない人は存在しないことになります。
また，元の裏命題では，「Ａ教徒でないならば，豚肉を食べることが許される」となっていて，限定の対象はＡ教徒でない人です。よって，Ａ教徒でない人は②のみで，④の豚肉ＮＧのＡ教徒でない人は存在しないことになります。
そして，④は存在しないという点で一致することこそが，元の逆命題と元の裏命題とは，実はまったく同義（同内容）の命題であることを示しています。
※「元の逆」の対偶は「元の裏」であり，「元の裏」の対偶は「元の逆」です。

Copywrite
遊学社　長山　訓

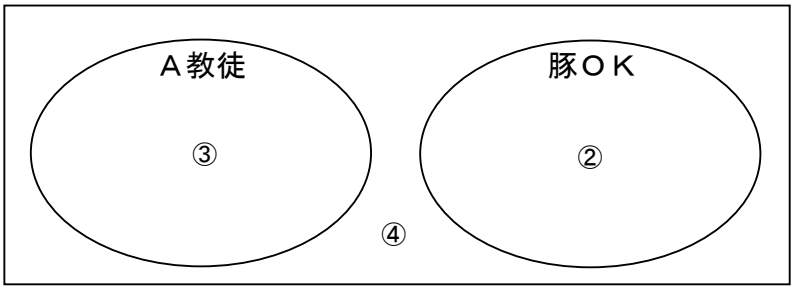
さらに，これらのことは，元の命題が成立している（真実である）とき，元の対偶命題もまた成立する（真実である）ものの，元の逆命題や裏命題は成立しない（真実ではない）ことを示しています。

	元	逆	裏	対偶
①　豚肉ＯＫのＡ教徒の人	×			×
②　豚肉ＯＫのＡ教徒ではない人				
③　豚肉ＮＧのＡ教徒の人				
④　豚肉ＮＧのＡ教徒ではない人		×	×	

前ページの各命題をベン図で描くと次のようになります。２つの円の左右の位置関係はどちらでもかまいません。

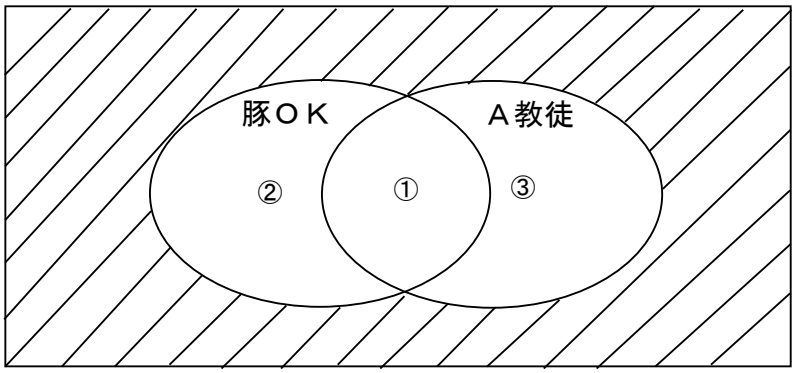
なお，どうしてもベン図を描かざるを得ないある問題においては，今回の逆命題や裏命題のように（否定形→肯定形）という形の命題が示されることはほとんどありません。

［(元命題）Ａ教徒 → 豚ＮＧ］≡［(元の対偶）豚ＯＫ → Ａ教徒でない］



①は存在しない

［(逆命題）豚ＮＧ → Ａ教徒］≡［（裏命題）Ａ教徒でない → 豚ＯＫ］



④は存在しない
つまり，斜線部は
存在しない

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 HA-1111

1-1) 生徒全員が受験したあるクラスの合否について，
「女子生徒は，すべて合格した」ということが判明した。
ア～ウで，上記より導き出すことができるものに〇をつけなさい。
また，カ～クで，確実に存在しない集合に〇をつけなさい。
なお，補欠合格などはなく，合格か不合格のいずれかとする。

□ ア　不合格となったのは，すべて男子生徒であった。

□ イ　男子生徒は，すべて不合格であった。

□ ウ　合格したのは，すべて女子生徒であった。

□ カ　合格した男子生徒

□ キ　不合格となった女子生徒

□ ク　不合格となった男子生徒

1-2) 生徒全員が受験したあるクラスの合否について，
「合格したのは，すべて女子生徒であった」ということが判明した。
ア～ウで，上記より導き出すことができるものに〇をつけなさい。
また，カ～クで，確実に存在しない集合に〇をつけなさい。
なお，補欠合格などはなく，合格か不合格のいずれかとする。

□ ア　女子生徒は，すべて合格した

□ イ　不合格となったのは，すべて男子生徒であった。

□ ウ　男子生徒は，すべて不合格であった。

□ カ　合格した男子生徒

□ キ　不合格となった女子生徒

□ ク　不合格となった男子生徒

※ 10 ～ 11 ページに
問題 2-1，2-2 が
あります。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 HA-1111 の解答

1-1)「女子生徒は，すべて合格した」ということが判明した。

論理式で表現すると　女 → 合　で，これが元の命題です。

ア～ウで，これの対偶になっているのは「ア」ですから，
元命題から導き出されるのは「ア」です。
ちなみに，女子でなければ男子ですし，合格でなければ不合格です。

ア　元の対偶　$\overline{合} \rightarrow \overline{女} \equiv 不 \rightarrow 男$

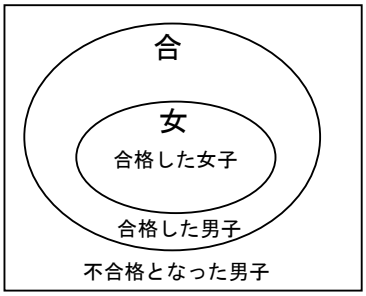
イ　元の裏　$\overline{女} \rightarrow \overline{合} \equiv 男 \rightarrow 不$

ウ　元の逆　$合 \rightarrow 女$

確実に存在しない集合は，

キ　不合格となった女子生徒

となります。



1-2)「合格したのは，すべて女子生徒であった」ということが判明した。

論理式で表現すると　合 → 女　で，これが元の命題です。

ア～ウで，これの対偶になっているのは「ウ」ですから，
元命題から導き出されるのは「ウ」です。

ア　元の逆　$女 \rightarrow 合$

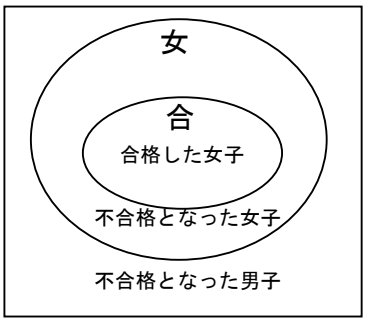
イ　元の裏　$\overline{合} \rightarrow \overline{女} \equiv 不 \rightarrow 男$

ウ　元の対偶　$\overline{女} \rightarrow \overline{合} \equiv 男 \rightarrow 不$

確実に存在しない集合は，

カ　合格した男子生徒

となります。



※ 10 ～ 11 ページに
問題 2-1，2-2 が
あります。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 HA-1111

2-1) ある鉄道列車において，
「この車両には，男性は乗車できない」　ということが判明しているとき，
ア～ウで，上記より導き出すことができるものに〇をつけなさい。
また，カ～クで，確実に存在しない集合に〇をつけなさい。

□ ア　女性は，すべて乗車できる。
□ イ　乗車できるのは，女性だけである。
□ ウ　乗車できないのは，男性だけである。

□ カ　乗車できる女性
□ キ　乗車できる男性
□ ク　乗車できない女性

2-2) 大相撲の土俵において，
「女性は土俵に上がれない」 ということが判明しているとき，
ア～ウで，上記より導き出すことができるものに〇をつけなさい。
また，カ～クで，確実に存在しない集合に〇をつけなさい。

□ ア　男性ならば，誰でも土俵に上がれる。
□ イ　土俵に上がれるのは，男性だけである。
□ ウ　土俵に上がれないのは，すべて女性である。

□ カ　土俵に上がれる男性
□ キ　土俵に上がれない男性
□ ク　土俵に上がれる女性

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 HA-1111 の解答

2-1)「男性は，すべて乗車できない」ということが判明している。
女性専用車両をイメージしましょう。なので，男の乳幼児は例外です。

論理式で表現すると　男 → $\overline{乗}$　で，これが元の命題です。

ア～ウで，これの対偶になっているのは「イ」ですから，
元命題から導き出されるのは「イ」です。
ちなみに，男性でなければ女性です。

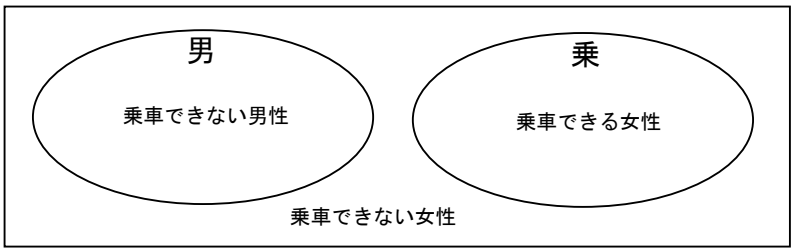
ア　元の裏　$\overline{男}$ → 乗 ≡ 女 → 乗

イ　元の対偶　乗 → $\overline{男}$ ≡ 乗 → 女

ウ　元の逆　$\overline{乗}$ → 男

確実に存在しない集合は，「キ）乗車できる男性」となります。

※女性でも，例えば，無銭乗車が発覚すると乗車を拒否されます。
よって，乗車できない女性が存在する可能性があります。



2-2)「女性は，すべて土俵に上がれない」ということが判明している。

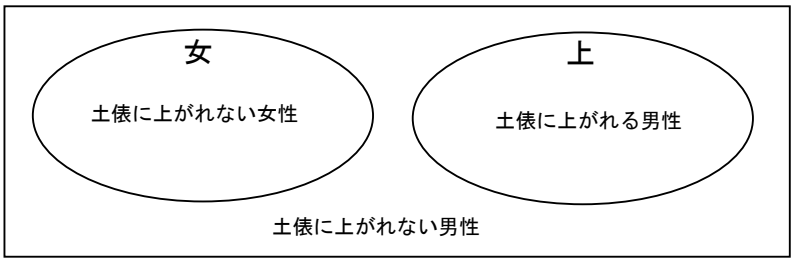
論理式で表現すると　女 → $\overline{上}$　で，これが元の命題です。

ア～ウで，これの対偶になっているのは「イ」ですから，
元命題から導き出されるのは「イ」です。

ア　元の裏　$\overline{女}$ → 上 ≡ 男 → 上

イ　元の対偶　上 → $\overline{女}$ ≡ 上 → 男

ウ　元の逆　$\overline{上}$ → 女

確実に存在しない集合は，「ク）土俵に上がれる女性」となります。

※男性については，上がれるのか，上がれないのか，元命題では何も
語っていません。一般的に考えれば，土俵に上がれるのは，力士，
行司など，大相撲協会の組織に属する男性であって，協会組織には
属さない一般男性は上がれないのではないでしょうか。