Part-SU5113 ●区別不可能な同じものを含む順列 -1

重複順列では,例えばコインが4枚あれば,4枚とも表(〇)の場合や, 4枚とも裏(●)の場合も起こりうる世界で、いわば内訳フリーでした。

それに対して、「表裏ともに2枚ずつとなる case は何通りか」というように、

内訳が指定されるのが、「同じものを含む順列」の世界です。 具体例で見ていきましょう。「4」が記されたカードと、「7」が記されたカードがともに2枚ずつあって、4枚すべてを横1列に並べて4桁の数字をつくるとき、つくることのできる数字はいくつあるかを考えましょう。なお、同じ数字のカードは互いに区別できないものとします。

最初のアプローチは難解なので、理解困難ならパスしてOKです。その場合、 このページ下部の「ところで、私は、……」の箇所に移動してください。

仮に,同じ数字のカードも区別できるとすると,「4枚すべてを順序を決め て並べる順列」となりますから、並べ方の総数は、

$$4! = {}_{4}P_{4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
 (通り) となります。

ここで, 4 枚のカードを「4a」「4b」「7a」「7b」としてみましょう。しかし, 実際には「a」と「b」の区別はつかないのですから、上記24通りは、それ ぞれ区別できない i . ii . iii . ivの4通りを持つ①~⑥の6通り(6組)に 集約されることになります。

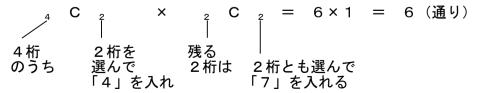
	i	ii	iii	iv				
1	4a 4b 7a 7b	4a 4b 7b 7a	4b 4a 7a 7b	4b 4a 7b 7a	→ 4477			
2	4a 7a 4b 7b	4a 7b 4b 7a	4b 7a 4a 7b	4b 7b 4a 7a	→ 4747			
3	4a 7a 7b 4b	4a 7b 7a 4b	4b 7a 7b 4a	4b 7b 7a 4a	→ 4774			
4	7a 4a 4b 7b	7b 4a 4b 7a	7a 4b 4a 7b	7b 4b 4a 7a	→ 7447			
⑤	7a 4a 7b 4b	7b 4a 7a 4b	7a 4b 7b 4a	7b 4b 7a 4a	→ 7474			
6	7a 7b 4a 4b	7b 7a 4a 4b	7a 7b 4b 4a	7b 7a 4b 4a	→ 7744			
これを「同じものを含む順列」の世界の数式では次のように表します。								

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{{}_{4}P_{4}}{{}_{2}P_{2} \times {}_{2}P_{2}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$
 (通り)

分子は、「a」「b」の区別がつく場合は、4枚すべて区別可能な場合は24 通りとなることを示しています。

分母に2つある「 $2 \times 1 = 2$ 通り」は、「4」と「7」の2数のそれぞれ について、aが先でbが後なのか、それともbが先でaが後なのかの2通りは区別できない(元々、aとかbという英字はついていない)ので、4通り ずつ(i~iv)の区別できない配列が存在することを意味します。

ところで、私は、個人的には、上記の形で表す「同じものを含む順列」の数式を用いることはほとんどなく、組合せ計算を用いています。なお、 $_2$ C_2 = 1 ですから、計算上は不要です。この式の意味は次のようになります。



※左側が「7」で、右側が「4」と思ってもかまいません。

前ページの組合せ計算の考え方では、選んで(選ばれて)いるのは、 「4枚(4,4,7,7)のカードのうち2枚」ではなく, 「4つ(千,百,十,一)の桁(カードを置く場所)のうち2桁」なのです。

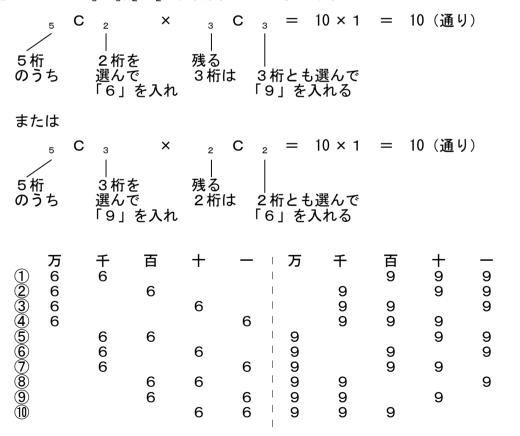
4桁のうち2桁を,「4」を入れる	千	百	+	_
場所として選べば、残る2桁には迷う	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
ことなく自動的に「7」を入れること	4	4		
になります。	4		4	
4桁のうち2桁を,「7」を入れる	4			4
場所として選べば、残る2桁には迷う			4	4
ことなく自動的に「4」を入れること		4		4
になります。			4	4

では、数字の「6」が記されたカードが2枚、「9」が記されたカードが3枚あって、これらの5枚すべてを横1列に並べて5桁の数字をつくるとき、つくることのできる数字は全部でいくつあるでしょうか。なお、同じ数字のカードは互いに区別できないものとします。

同じものを含む順列の数式では、次のようになります。

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{{}_{5}P_{5}}{{}_{2}P_{2}\times{}_{3}P_{3}} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{12} = 10$$
 (通り)

一方,組合せ計算で求めると、次のようになります。なお、かけ算ですから、値が1になる $_3$ C_3 , $_2$ C_2 は、実質的には不要です。



問題 SU-5113

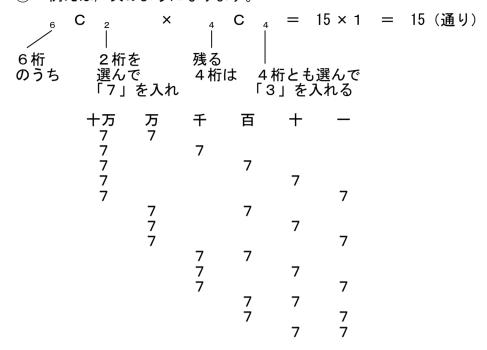
① 「3」と記されたカードが4枚,「7」と記されたカードが2枚ある。 これら6枚のカードをすべて横1列に並べるとき, つくることができる6桁の数字は何通りあるか。 ただし, 同じ数字のカード同士は区別できないものとする。

② 「9」と記されたカードが1枚,「8」と記されたカードが2枚,「7」と記されたカードが3枚ある。これら6枚のカードをすべて横1列に並べるとき,つくることができる6桁の数字は何通りあるか。ただし、同じ数字のカード同士は区別できないものとする。

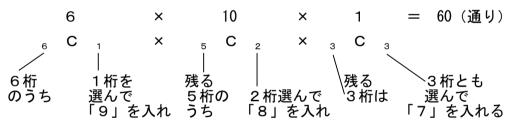
③ 1回に1人ずつ出産し、計4回(4人)出産する場合において、産まれる子どもが男女2人ずつとなるパターンは何通りか。

問題 SU-5113 の解答

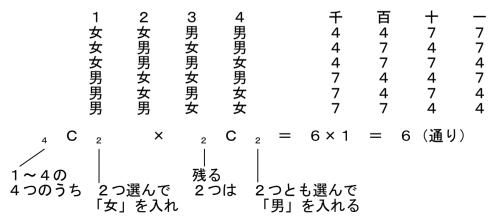
① 例えば、次のようになります。



② 例えば、次のようになります。



③ これは、「4」が記されたカードと、「7」が記されたカードがともに2枚ずつあり、4枚すべてを横1列に並べて4桁の数字をつくるとき、つくることのできる数字が6通りになるのとまったく同じです。



※左側が「男」で、右側が「女」と思ってもかまいません。