Copywrite
遊学社　長山　訓

Part-SU6111 ●分母が減っていく世界の確率－１

確率の第１ステージは，くじ引きの世界です。くじ引きの問題のほとんどは，引いたくじを元に戻すことはしないのですが，元に戻すという設定の問題が出題されたことも何度かあります。

早速，具体的な例で考えてみましょう。
アタリくじ１本とハズレくじ２本があり，Ａ，Ｂ，Ｃの３人がＡ，Ｂ，Ｃの順で１本ずつ引くことになった。このとき，この３人がアタリくじを引く確率はそれぞれいくらでしょうか。
なお，引いたくじは元には戻さず，引く前にアタリとハズレの区別はつかないものとします。

結論から述べると，次に示すように，３人とも等しく $\frac{1}{3}$ になります。

なお，個々の局面で見るとき，アタリを引く確率，ハズレを引く確率は，それぞれ次のようになります。

$$\text{アタリの確率} = \frac{\text{今あるアタリの本数}}{\text{今あるくじの総本数}} \qquad \text{ハズレの確率} = \frac{\text{今あるハズレの本数}}{\text{今あるくじの総本数}}$$

全部で３本あり，Ａ，Ｂ，Ｃの順で引きますから，分母は，Ａが引くときが３，Ｂが引くときが２，Ｃが引くときが１と，１ずつ減少していきます。
※1/3 は「３分の１」

	１番Ａ		２番Ｂ		３番Ｃ		
	↓		↓		↓		
① Ａがアタリを引く確率 ＝	ア 1/3	×	ハ 2/2	×	ハ 1/1	＝	1/3
② Ｂがアタリを引く確率 ＝	ハ 2/3	×	ア 1/2	×	ハ 1/1	＝	1/3
③ Ｃがアタリを引く確率 ＝	ハ 2/3	×	ハ 1/2	×	ア 1/1	＝	1/3

なお，これは場合の数（順列・組合せ）でもお話しましたが，連続または同時の事象の確率はかけ算，case 違いの確率はたし算となります。
「３人のうち誰か１人がアタリを引く確率は？」と問われれば，上記の①，②，③の３つの case のいずれかですから，①＋②＋③＝１＝100%となります。もっとも，そんなふうに考えるまでもなく，３本のうち１本アタリで，３人が引くのですから，必ず誰か１人がアタリを引くのは明白ですね。

ちなみに，この例が示すように，一般に，くじ引きにおいてアタリを引く確率は，何番目に引くかの順番にかかわりなく，全員同じ確率となります。

ですから，例えば，５本のうち１本だけがアタリで，５人が１本ずつ引く場合は，５人とも $\frac{1}{5}$ となります。同様に，100 本のうち１本だけがアタリで，100 人が１本ずつ引く場合は，100 人とも（１番目も 100 番目も）$\frac{1}{100}$ ずつとなります。

Copywrite
遊学社　長山　訓

では，もう１つ，具体例をあげましょう。
アタリくじ２本とハズレくじ６本があり，Ａさんが同時に２本引くとき，次の２つの確率はそれぞれいくらになるでしょうか。
なお，引いたくじは元には戻さず，引く前にアタリとハズレの区別はつかないものとします。

Ｑ１）２本ともアタリを引く確率　　$\frac{2}{8}$ ではありませんよ！

Ｑ２）アタリとハズレを１本ずつ引く確率　　２つのcaseがありますよ！

Ｑ３）少なくとも１本アタリを引く確率

このような問題においては，問題文で，「同時に２本引く」と記されていても，「１本ずつ２回引く」と考えるほうが解きやすくなります。

起こりうる事象は次の①～④の４通りです。いま，求められているのは②と③ですから，①と④は考慮する必要はないのですが，全貌を明らかにするために，掲載します。

		１本目		２本目		
		↓		↓		
①	２本とも	ア		ア		
	アタリ	2/8	×	1/7	＝	2/56
②	アタリと	ア		ハ		
	ハズレが	2/8	×	6/7	＝	12/56
	いずれも					
③	１本ずつ	ハ		ア		
		6/8	×	2/7	＝	12/56
④	２本とも	ハ		ハ		
	ハズレ	6/8	×	5/7	＝	30/56
	全合計					56/56＝1

Ｑ１）２本ともアタリは①ですから，$\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$ となります。

Ｑ２）アタリとハズレが１本ずつとなるのは，②と③です。
②と③はcase違いですから，求める確率は両者の和となります。

$\frac{12}{56}+\frac{12}{56}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$ となります。

Ｑ３）２本引く場合において，「少なくとも１本アタリ」というのは，２本ともアタリまたは１本だけアタリです。
この問いに対しては，下記のｉとⅱの２つのアプローチがありますが，一般にⅱのほうが計算量が少なく，効率的（ラク）です。

ｉ）　①＋②＋③＝ 26/56 ＝ 13/28

ⅱ）　　１　－　余事象④（２本ともハズレ）の確率
＝ 56/56 －　　30/56
＝ 26/56 ＝ 13/28　※余事象とは，対象外の事象のことです。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-6111

① アタリくじが１本，ハズレくじが３本，計４本のくじがある。Ａ，Ｂ，Ｃの順で１本ずつ引くとき，３人のうち誰か１人がアタリくじを引く確率はいくらか。ただし，引いたくじは元に戻さないものとする。

② アタリくじが２本，ハズレくじが８本，計 10 本のくじがある。同時に２本引くとき，２本ともハズレとなる確率と，少なくとも１本アタリを引く確率の比はいくらか。

③ アタリくじが３本，ハズレくじが６本，計９本のくじがある。ここから１本ずつ３回（３本）引くときに，次のｉとⅱはいくらか。

ｉ）　引いたクジを元に戻さないとき，少なくとも１本アタリの確率
ⅱ）　引いたクジを元に戻すとき，少なくとも１本アタリの確率

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-6111 の解答

①

		１番Ａ		２番Ｂ		３番Ｃ		
		↓		↓		↓		
i	Ａがアタリを	ア		ハ		ハ		
	引く確率　＝	1/4	×	3/3	×	2/2	＝	1/4
ii	Ｂがアタリを	ハ		ア		ハ		
	引く確率　＝	3/4	×	1/3	×	2/2	＝	1/4
iii	Ｃがアタリを	ハ		ハ		ア		
	引く確率　＝	3/4	×	2/3	×	1/2	＝	1/4
iv	全員ハズレを	ハ		ハ		ハ		
	引く確率　＝	3/4	×	2/3	×	1/2	＝	1/4

３人のうち誰か１人がアタリの確率は,
　ｉ＋ii＋iii＝3/4　　or　１　－　余事象ivの確率＝3/4

②

		１本目		２本目		
		↓		↓		
i	２本とも	ア		ア		
	アタリ	2/10	×	1/9	＝	2/90
ii	アタリと	ア		ハ		
	ハズレが	2/10	×	8/9	＝	16/90
	いずれも					
iii	１本ずつ	ハ		ア		
		8/10	×	2/9	＝	16/90
iv	２本とも	ハ		ハ		
	ハズレ	8/10	×	7/9	＝	56/90
	全合計					90/90＝1

２本ともハズレとなる確率＝iv＝56/90
少なくとも１本アタリとなる確率＝１－ivの確率＝34/96
両者の比＝56：34＝28：17

③　どちらも,　１　－　　余事象の確率
　　＝１　－　３本ともハズレの確率　で解きます。

ｉ）　引いたクジを元に戻さないとき，少なくとも１本アタリの確率

$$1 - \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

ii）　引いたクジを元に戻すとき，少なくとも１本アタリの確率

$$1 - \frac{6}{9} \times \frac{6}{9} \times \frac{6}{9}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$