Copywrite
遊学社　長山　訓

Part-SU7111 ●約数と倍数は表裏一体の関係－１

このジャンルは，ＳＰＩなど民間の就職試験で出題されることは希であり，ほとんど公務員試験専用ジャンルと言っても過言ではありません。

ｉ）約数と倍数の関係

例えば，12という正の整数を，２個の正の整数の積として（かけ算で）で表現すると，「１×12」，「２×６」，「３×４」，の３組が存在します。
このとき，次のように表現することができます。

● 12の約数は，「１，２，３，４，６，12」の６個であり，

● 12は，「１，２，３，４，６，12」の６個の倍数となります。

これを，文字を使って表すと，
ａ＝ｂ×ｃ（ａ÷ｂ＝ｃ）（ａ÷ｃ＝ｂ）のとき，
「ｂ，ｃはａの約数であり」，
「ａはｂ，ｃの倍数である」ということになります。

ただし，このとき，ａ，ｂ，ｃとも正の整数です。
例えば，５＝２×2.5（５÷２＝2.5）（５÷2.5＝２）となりますが，
２も，2.5も，５の約数ではありませんし，
５は，２の倍数でも，2.5の倍数でもありません。

なお，正の整数のことを「自然数」と呼ぶことがあります。
公務員試験の問題文においては，「正の整数」と表現されることもありますし，「自然数」と表現されることもあります。
「自然数＝正の整数」ですから，自然数と言えば，マイナス（負）の整数はもちろん，「０」も含まれません。

ではここで，約数・倍数に関するいくつかの代表的な性質を紹介しましょう。

①「１」はすべての自然数の約数であり，すべての自然数は「１」の倍数です。
なぜなら，すべての自然数ｎは，必ず「１×ｎ」と表現できるからです。

例えば，18＝１×18，24＝１×24と表現できます。
よって，１は18の約数であり，24の約数でもあります。
また，18は１の倍数ですし，24も１の倍数です。

②約数の最小値は必ず１であり，約数の最大値は必ずその数自身です。
これもまた，上記①でお話したように，すべての自然数ｎは「１×ｎ」と表現できるからです。18＝１×18ですし，24＝１×24です。よって，

18の約数の最小値は１，18の約数の最大値は18自身となり，
24の約数の最小値は１，24の約数の最大値は24自身となります。

③倍数の最小値は必ずその数自身であり，倍数の最大値は存在しません。
18の倍数の最小値は18自身ですし，24の倍数の最小値は24自身です。
しかし，数字の桁数の上限は存在しませんから，18の倍数も，24の倍数も，その個数は無限であり，　倍数の最大値も無限大∞です。

18の倍数	18	36	54	72	90	108	……	無限
24の倍数	24	48	72	96			……	無限

Copywrite
遊学社　長山　訓

ⅱ）約数と素数の関係

素数とは，約数を２個だけ持つ自然数のことです。
ところで，「18 ＝１× 18」，「24 ＝１× 24」などのように，２以上のすべての自然数は，少なくとも２個の約数（１とその数自身）を持っています。

自然数の中でたった１つ，約数が１個だけの数が「１」です。
「１」の約数は唯一「１」だけです。
もちろん，１＝１×１と表現できますが，だからと言って，「１」の約数は「１」と「１」の２個ということにはなりませんね。

それはさておき，20 未満の素数をすべて挙げると次の８個が挙げられます。

２　３　５　７
11　13　17　19

素数とかかわりのある言葉として，「素因数分解」という言葉があります。
これは，自然数を素数だけのかけ算で表すことです。例えば，次のようになります。

$18 = 2 \times 9 = \underline{2 \times 3 \times 3} = 2 \times 3^2$

$24 = 3 \times 8 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 3} = 2^3 \times 3$

$120 = 6 \times 20 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5} = 2^3 \times 3 \times 5$

$210 = 7 \times 30 = \underline{2 \times 3 \times 5 \times 7}$

ⅲ）人数比と倍数の関係

公務員試験の数的推理の問題では，人数比が示されることが度々あります。人数やモノの個数のように，値が整数になるものの比が示される場合，その多くは，「倍数」の概念で考えることになります。

例えば，「男女の人数比は３：５」というとき，次のように無数の case が存在しますが，これらのすべてにおいて，
「男性の人数は３の倍数」，「女性の人数は５の倍数」，「男女総数は８の倍数」となることがわかります。

	男　性		女　性	総　数
比	３	：	５	
case1	３人		５人	８人
case2	６人		10 人	16 人
case3	９人		15 人	24 人
case4	12 人		20 人	32 人
case5	15 人		25 人	40 人
⋮	⋮		⋮	⋮
case10	30 人		50 人	80 人
⋮	⋮		⋮	⋮
	↑		↑	↑
	３の倍数		５の倍数	８の倍数

Copywrite
遊学社　長山　訓

ⅳ）ｎの倍数±ｎの倍数＝ｎの倍数

例えば，４の倍数同士のたし算やひき算の結果は必ず４の倍数になりますし，９の倍数同士のたし算やひき算の結果は必ず９の倍数になります。

●４の倍数同士　例　28　＋　20　＝　48
４×７　４×５　４×（７＋５）

例　28　－　20　＝　8
４×７　４×５　４×（７－５）

●９の倍数同士　72　＋　27　＝　99
９×８　９×３　９×（８＋３）

例　72　－　27　＝　45
９×８　９×３　９×（８－３）

ところで，４の倍数でないもの同士でたし算したときに，たし算結果が４の倍数になることはありえます。例えば，６＋10＝16 などです。しかし，このようなパターンが，数的推理の問題のネタになることはありません。

では，次の場合において，（　　）の中にはどんな数字が入るでしょうか？

４ の 倍 数 ＋ （　　） ＝ ４ の 倍 数

下記に示すように，（　　）の中の数は必ず４の倍数でなければなりません（例外として，０でもＯＫです）。

12	＋	（	０	）	＝	12	→ ４の倍数
12	＋	（	１	）	＝	13	
12	＋	（	２	）	＝	14	
12	＋	（	３	）	＝	15	
12	＋	（	４	）	＝	16	→ ４の倍数
12	＋	（	５	）	＝	17	
12	＋	（	６	）	＝	18	
12	＋	（	７	）	＝	19	
12	＋	（	８	）	＝	20	→ ４の倍数

ⅴ）倍数の見分け方

必須とはいいませんが，ある数字を見たときに，それが何の倍数なのかを見分けられることが望ましいといえます。

①１の位だけを見れば判断可能
●２の倍数→１の位が０，２，４，６，８，のいずれかになっている数。
●５の倍数→１の位が０または５のいずれかになっている数。

②下２桁を見れば判断可能
●４の倍数→下２桁が４の倍数になっている数。

③すべての位のたし算をすることで判断可能
●３の倍数→各位（各桁）の数の和が３の倍数になっている数。
●９の倍数→各位（各桁）の数の和が９の倍数になっている数。

④その他
●６の倍数→２の倍数と３の倍数の両方の条件を満たしている数。

Copywrite
遊学社　長山　訓

前ページの「倍数の見分け方」は覚えておけば十分なのですが，なぜそのような見分け方で判断できるかを理解しておけば，より覚えやすくなります。

例えば，「下２桁が４の倍数」になっていれば，百の位，千の位，万の位…がどんな数字であっても，必ず４の倍数なのですが，そう言える根拠はどこにあるのでしょうか。3456 という４桁の数で考えてみましょう。

①まず，　3456 ＝ 3400 ＋ 56　と分解します。

②次に，　3456 ＝ 100 × 34　＋　56　とします。

③さらに，3456 ＝ $\underline{4 \times 25 \times 34}$ ＋ $\underline{4 \times 14}$　とします。

↓　　↓

４の倍数　＋　４の倍数

●100は４の倍数ですから，100の倍数（上記では3400）は必ず４の倍数です。
このため，下２桁が４の倍数になっている数は，
必ず「100 の倍数（４の倍数）＋４の倍数」の形で表現できることになり，
たし算結果は４の倍数となります。

次に，「各位（各桁）の和が９の倍数」になれば，その数は９の倍数ということの根拠を，やはり 3456 という４桁の数で考えてみましょう。

①まず，3456 を次のように分解します。

3456 ＝ 1000 × ３ ＋ 100 × ４ ＋ 10× ５ ＋ １× ６

②次に，1000 × ３，100 × ４，10 × ５をさらに分解します。

3456 ＝ $\underline{999 \times 3}$ ＋１× ３ ＋ $\underline{99 \times 4}$ ＋１× ４ ＋ $\underline{9 \times 5}$ ＋１× ５ ＋ １× ６

③次のように並べ替えます。「１×」は不要ですから削除します。

3456 ＝ $\underline{999 \times 3}$ ＋ $\underline{99 \times 4}$ ＋ $\underline{9 \times 5}$ ＋ （３＋４＋５＋６）

↓　　↓　　↓　　↓

９の倍数＋９の倍数＋９の倍数　＋　18

●このように，下線部は必ず９の倍数となりますから，（　　）の中が９の倍数になれば，すべて９の倍数同士のたし算で表すことができ，その和は９の倍数となります。
ところで，その（　　）の中は，まさしく各位（各桁）の和となっています。

※前ページの「下２桁を見れば判断可能」には，20 の倍数，25 の倍数もあります。
20 の倍数は，下２桁が 20 の倍数（20，40，60，80，00）となっており，
25 の倍数は，下２桁が 25 の倍数（25，50，75，00）となっています。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-7111

① 36 の約数をすべて挙げなさい。

② 30 ～ 50 の範囲内の素数をすべて挙げなさい。

③ 630 を素因数分解しなさい。

④ある集団の男女に，ある議題についての賛否を確認した。
この集団の男女比３：２，賛成者と反対者の比は７：３で，女性は全員が賛成であった。
このとき，男性の賛成者数と女性の賛成者数の比はいくらか。

※⑤は中級レベル以上，⑥は上級レベルです。今すぐ解けなくてもＯＫです。

⑤ａ，ｂ，ｎはいずれも自然数であり，７ａ＋９ｂ＝63ｎになるとき，
ａは（　　）の倍数であり，ｂは（　　）の倍数である。

⑥ 864 が９の倍数，かつ４の倍数あることを，数式によって証明しなさい。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-7111 の解答

① 36 ＝１× 36 ＝２× 18 ＝３× 12 ＝４×９＝６× ６
よって，36 の約数は，１，２，３，４，６，９，12，18，36 の９個となります。

② 30 ～ 50 の範囲内の素数は，31，37，41，43，47 の５個となります。
ちなみに，39，49 は素数ではありません。
39 には１と 39 のほかに３と 13，49 には１と 49 のほかに７という約数が存在するからです。

③ 1260 ＝ 126 × 10＝２×　63　× ２× ５
＝２× ７×　９　×２×５
＝２× ７×３×３　×２×５　＝２^{2}× ３^{2}× ５× ７

④ 男女比３：２より，この集団の総数は５の倍数となり，賛成と反対の比が７：３より，この集団の総数は 10 の倍数となります。すると，この集団の総数は５の倍数であり，なおかつ 10 の倍数となりますから，結局 10 の倍数となります。そこで，この集団の総数を 10 人と仮定すると，
男性６人，女性４人，賛成７人，反対３人となり，女性は全員賛成ですから，次のようになります。

	賛成	反対	総数
男性			６人
女性	４人	０人	４人
総数	７人	３人	10 人

	賛成	反対	総数
男性	３人	３人	６人
女性	４人	０人	４人
総数	７人	３人	10 人

よって，男性の賛成者数と女性の賛成者数の比は３：４となります。

⑤ 63 の倍数は，７の倍数であり，なおかつ９の倍数でもあります。
９ｂ，63 ｎともに９の倍数ですから，７ａもまた９の倍数でなければなりません。７ａが９の倍数になるのは，ａが（９）の倍数のときです。
７ａ，63 ｎともに７の倍数ですから，９ｂもまた７の倍数でなければなりません。９ｂが７の倍数になるのは，ｂが（７）の倍数のときです。

⑥ 864 ＝ $\underline{100 \times 8}$ ＋ $\underline{10 \times 6}$ ＋ １× ４
＝ $\underline{99 \times 8 + 1 \times 8}$ ＋ $\underline{9 \times 6 + 1 \times 6}$ ＋ １× ４
＝ 99 × ８ ＋ ９×６ ＋ ８＋６＋４
↓　↓　↓
＝９の倍数＋９の倍数 ＋（18 ＝９の倍数）

864 ＝ $\underline{100 \times 8}$ ＋ $\underline{64}$
＝ $\underline{4 \times 25 \times 8}$ ＋ $\underline{4 \times 16}$
↓　↓
４の倍数 ＋ ４の倍数