Copywrite
遊学社　長山　訓

Part-SU7112 ●公約数と公倍数の「公」は「共通」－１

公務員試験の数的推理では，公約数や公倍数を求めなければならない問題も頻繁に出題されています。その頭文字の「公」ですが,具体的には「共通の」という意味になります。例えば,

● 「18 と 24 の公約数」といえば,
18 の約数であり，かつ 24 の約数でもある数，つまり,
18 と 24 の共通の約数（１，２，３，６）ということです。

18 の約数	１	２	３		６		９	18	
24 の約数	１	２	３	４	６	８	12		24

● 「18 と 24 の公倍数」といえば,
18 の倍数であり，かつ 24 の倍数でもある数，つまり,
18 と 24 の共通の倍数（72,144,216……＝ 72 の倍数）ということです。

18 の倍数	18	36	54	72	90	108	126	144	…
24 の倍数	24	48		72	96	120		144	…

ｉ）公約数，公倍数の求め方

ところで，18 と 24 はいずれも２桁であり，２桁の中でも比較的小さい数ですから，上に示したように，それぞれの約数や倍数を並べてみることで，公約数や公倍数を見つけることが可能でした。しかし，数字が大きくなればなるほど，この方法では厳しくなります。

そこで,一般的な算出方法を紹介しましょう。一般的には,次に示すように,まずはそれぞれの数の公約数で割り続けることになります。

２）18　24
　　９　12

① 18 と 24 ですから，いきなりどちらも６で割り切れると気づくかもしれません。気づいたなら，いきなり６で割っていいのですが，気づかなければ，まずは２で割りましょう。

２）18　24
３）９　12
　　３　４

② 今度は９と 12 です。９は奇数ですから，２では割り切れません。９，12 ともに３で割り切れますから，３で割ります。

③ 今度は３と４です。３と４の間には１以外の公約数がありません。１で割っても再び３と４であり，変化がありませんから，１で割るという作業はしません。したがって，１以外の公約数がなくなったなら，そこで割り算作業は終了です。

● 最大公約数は,「 ）」の左側の数字たちのかけ算で求められます。
上記では，２×３＝６ですから，18 と 24 の最大公約数は６です。

● 最小公倍数は,「 ）」の左側の数字たちと，一番下の数字たちのかけ算で求められます。上記では，２×３×３× ４＝ 72 ですから，18 と 24 の最小公倍数は 72 です。

なお，最小公倍数は，次のような計算でも求めることができます。
（一番上の左側の数＝元の 18）×（一番下の右側の数４）＝ 72
（一番上の右側の数＝元の 24）×（一番下の左側の数３）＝ 72

Copywrite
遊学社　長山　訓

ⅱ）互いに素って，どういう意味？

先ほど，「３と４の間には，１以外の公約数がない」とお話しました。このように，複数の自然数同士において，公約数が１しかない状態を「互いに素」といいます。

注意していただきたいのは，「それぞれの数字が素数である」とは限らないということです。
例えば,「３」は素数ですが,「４」は素数ではありません。素数でない「４」が含まれていても，３と４の間には１以外の公約数がないため，「３と４は互いに素である」といいます。いくつかの例を見てみましょう。

互いに素な関係
↓

例１）　２と３　　２，３ともに素数です。
例２）　３と４　　３は素数ですが，４は素数ではありません。
例３）　８と９　　８，９ともに素数ではありません。

公務員試験では，問題文の中で，例えば「２つの自然数Ａ，Ｂは互いに素であり……」といった表現が見受けられますので，「互いに素」という言葉の意味を正しく理解していただきたいと思います。

ⅲ）３つ以上の自然数の最大公約数と最小公倍数

公務員試験の問題においては，３個以上の自然数の最大公約数や最小公倍数を求める必要が生じる問題もあります。例えば，「４」「５」「６」の３数で考えてみましょう。

２　）　４　　５　　６
　　２　　５　　３

①　４と６は２で割り切れるので，２で割ります。一方，５は２で割り切れませんので，そのまま，真下に５と記します。

②　このとき，「　）」の左側には２がありますが，だからと言って「最大公約数は２」というわけにはいきません。と言うのは，５は２で割り切れなかったからです。登場する数（ここでは４，５，６）のすべてを割り切ることができる数が１しか存在しないときは，最大公約数は１ということになります。

③　一方，最小公倍数は先ほどと同様，「　）」の左側の数字たち（今回は２のみ）と，一番下の数字たち（今回は２，５，３）のかけ算で求めることができます。
したがって，４，５，６の３数の最小公倍数＝２×２×５×３＝60 となります。

●　最小公倍数については，次の手順で求めることもできます。

①　互いに素ではない（１以外の公約数が存在する）２数の最小公倍数を求めます。ここでは，「４」と「６」の最小公倍数 12 を求めます。

②　今，算出した「12」と，残った「５」の最小公倍数を求めます。
「12 と５は互いに素」です。互いに素の関係にある２数の最小公倍数を求めるには，そのままその２数をかけ算することになります。
したがって，12 と５の最小公倍数は 12 × ５＝ 60 となります。
この 60 が，４，５，６の３数の最小公倍数となります。

Copywrite
遊学社　長山　訓

ⅳ）Ａ×Ｂ＝（ＡとＢの最大公約数）×（ＡとＢの最小公倍数）

再び，２数の関係に戻ります。

表題の内容を 18 と 24 で確認してみましょう。18 と 24 の最大公約数は６，最小公倍数は 72 でした。これらをもとに，上記表題の式を立てると次のようになります。

	18 と 24 の最大公約数		18 と 24 の最小公倍数		
	↓		↓		
18 × 24 ＝	6	×	72	＝	432

これもまた，公式や定理の一種ですから，覚えておけば問題を解くことはできるのですが，なぜそうなるかを確認しておきましょう。

なお，今回は割る数を 18 の左側だけでなく，24 の右側にも記載します。

```
2 ) 18 | 24 (  2
3 ) 9  | 12 (  3
      3 |  4
```

さて，この計算をもとに，次のような数式を立ててみましょう。

						18		24				
						↓		↓				
●	18	×	24	＝	（２×３×３）	×	（２×	３×	４）	＝	432
★	６	×	72	＝	（２×３）	×	（２×３×	３×	４）	＝	432
					↑			↑				
					最大公約数			最小公倍数				

このとき，●式，★式ともに，右辺は，２が２個，３が３個，４が１個のかけ算となることがわかります。このため，

18 × 24 ＝６× 72 ＝（18 と 24 の最大公約数）×（18 と 24 の最小公倍数）

という関係が成立することになります。

この関係「Ａ×Ｂ＝（ＡとＢの最大公約数）×（ＡとＢの最小公倍数）」を知らないと戸惑ってしまうような問題も，ときどき（頻繁ではありません）出題されていますので，覚えておくほうが望ましいです。

もちろん，この関係は，ＡとＢがどのような自然数の場合でも成立します。いくつか例を示しておきましょう。

	９と 12 の最大公約数		９と 12 の最小公倍数		
９× 12 ＝	3	×	36	＝	108

	12 と 18 の最大公約数		12 と 18 の最小公倍数		
12 × 18 ＝	6	×	36	＝	216

Copywrite
遊学社　長山　訓

ｖ）剰余と倍数の関係

このＰａｒｔの最後は「剰余」の関するお話です。「剰余（じょうよ)」とは，割り算の余りのことです。

まずは，割り算とかけ算の相互関係をおさえておきましょう。それは，次のようなものです。

ａ ÷ ｎ ＝ ｂ 余り ｃ のとき，	20 ÷ ３ ＝ ６ 余り ２ のとき
ａ ＝ ｎ×ｂ ＋ ｃ になる。	20 ＝ ３× ６ ＋ ２ になる。

ですから，

「ａをｎで割ってｃ余る」とき，	「20 を３で割って２余る」とき，
ａはｎの倍数＋ｃ となります。	20 は３の倍数（18）＋２となります。

さて，公務員試験ではこのように，剰余に関する情報をもとに，「倍数」について考えさせる問題が頻繁に出題されています。早速，具体例を見ていきましょう。このタイプの問題であなたがすべきことは，

<u>不一致系の情報が示されていた場合に，一致系の情報に変換</u>することです。

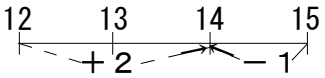
例① 余りが一致系 → ３で割っても，４で割っても２余る数

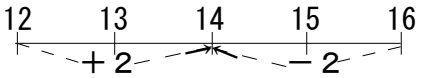
言い換えると，（３の倍数＋２），かつ（４の倍数＋２）です。
よって，この数は（３と４の公倍数）＋２＝12 の倍数＋２ となり，
該当する数は，14，26，38，50 …と，12 ずつ増えていきます。

例② 不足が → １たすと３で割り切れ， （割り切れるための不足が１）
不一致 ２たすと４で割り切れる数 （割り切れるための不足が２）

言い換えると，（３の倍数－１）かつ（４の倍数－２）です。
これは，実質的に例①１と同じで，該当する最小値は 14 です。
つまり，不足不一致系は，次に示すように，余り一致系に変換すべきということを意味します。

１たすと３で割り切れる数（15 －１）＝３で割ると２余る数（12 ＋２）
２たすと４で割り切れる数（16 －２）＝４で割ると２余る数（12 ＋２）





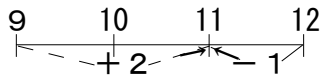
例③ 不足が一致系 → １たすと，３でも４でも割り切れる数

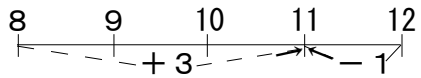
言い換えると，（３の倍数－１）かつ（４の倍数－１）です。
よって，この数は，（３と４の公倍数）－１＝12 の倍数－１ となり，
該当する数は，11，23，35，47 …… と 12 ずつ増えていきます。

例④ 余り不一致系 → ３で割ると２余り，４で割ると３余る数

言い換えると，（３の倍数＋２）かつ（４の倍数＋３）です。
これは，実質的に例③と同じで，該当する最小値は 11 です。
つまり，余り不一致系は，次に示すように，不足一致系に変換すべきということを意味します。

３で割ると２余る数（９＋２）＝１たすと３で割り切れる数（12 －１）
４で割ると３余る数（８＋３）＝１たすと４で割り切れる数（12 －１）





Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-7112

① 96 と 108 の最大公約数と最小公倍数を計算によって求めなさい。

② 10 ～ 20 の範囲の自然数ａ，ｂで，ａ，ｂとも素数ではないが,「互いに素」である組合せをすべて挙げなさい。

③９，11，12，の３数の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

④ 60 × 72 ＝（60 と 72 の最大公約数）×（60 と 72 の最小公倍数）となることを，数式を立てて証明しなさい。

⑤６で割っても，８で割っても３余る数のうち，最小の自然数はいくらか。

⑥３たすと８で割り切れ，４たすと９で割り切れる数のうち，最小の自然数はいくらか。

Copywrite
遊学社　長山　訓

問題 SU-7112 の解答

①

２	)	96	108
２	)	48	54
３	)	24	27
		８	９

最大公約数＝２×２× ３＝12
最小公倍数＝２×２× ３× ８× ９＝864

最小公倍数＝96 ×９＝108× ８＝864

② 10 ～ 20 の自然数で素数でないのは，10，12，14，15，16，18，20 です。

偶数同士は必ず１以外に２という公約数が存在するので，
「互いに素」になる可能性があるのは，奇数同士または奇数と偶数です。

具体的には，「14 と 15」，「15 と 16」は，それぞれ互いに素です。

③

３	)	９	11	12
		３	11	４

11 は３で割り切れないので，
最大公約数は１です。

最小公倍数＝３×３× 11 ×４＝396　となります。

９と 12 の最小公倍数は 36 であり，
36 と 11 は互いに素なので，36 と 11 の最小公倍数＝ 36×11 ＝ 396。
よって，９，11，12 の３数の最小公倍数＝ 396　となります。

④

２	)	60	72	(	２
２	)	30	36	(	２
３	)	15	18	(	３
		５	６		

最大公約数＝２× ２× ３＝ 12
最小公倍数＝２× ２× ３× ５× ６
＝ 60× ６＝ 72× ５
＝ 360

● 60 × 72 ＝（２×２×３×５）×（２× ２× ３× ６）＝4360
★ 12 × 360＝（２×２×３）×（２×２× ３× ５× ６）＝4360

２式とも，右辺は，２が４個，３が２個，５と６が１個ずつのかけ算。

⑤ 求める値は，

（６の倍数＋３）かつ（８の倍数＋３）
＝（６と８の公倍数）　＋　３
＝　　24 の倍数　　＋　３　となります。最小値は 27 となります。

⑥ ８の倍数－３（例えば 24 －３＝ 21）＝８の倍数＋５（16 ＋５）
９の倍数－４（例えば 27 －４＝ 23）＝９の倍数＋５（18 ＋５）

よって，求める値は，（８と９の公倍数）＋５＝ 72 の倍数＋５となります。
最小値は 77 となります。